УДК 536.12+517.958 DOI: 10.29006/978-5-9901449-3-4-2017-1-64-67

НЕЛИНЕЙНАЯ НАКАЧКА УРОВНЯ – ПАМПИНГ-ЭФФЕКТ В ВОРОНКООБРАЗНЫХ ПРИЛИВНЫХ ЗАЛИВАХ

Зырянов В.Н.[1], Чебанова М.К.[1]

[1] *Институт водных проблем РАН, 119333, г. Москва, ул. Губкина, д. 3, +7 (499) 135-54-56 v.n.zyryanov@yandex.ru; ejek@inbox.ru*

The pumping effect is estimated for a funnel type tidal bay. Linearized equation of viscous flow motion at depth less than Stokes layer is given. The oscillations of the free surface lead to nonlinear pumping effect in oscillatory processes: the effect of either «pumping in» or «pumping out» of the substance at infinity caused by harmonic oscillation at the boundary.

В вершинах заливов и эстуариев глубины, как правило, уменьшаются и становятся сравнимыми с толщиной слоя Стокса. При глубинах меньше толщины слоя Стокса трение становится доминирующим. Колебания свободной поверхности описываются нелинейным параболическим уравнением [1]. Для нелинейных параболических уравнений типа уравнения нелинейной теплопроводности известно явление пампинг-эффекта – стационарное повышение (или понижение) значения искомой характеристики на бесконечности при чисто гармонических колебаниях этой характеристики на границе. Впервые этот эффект был описан в работе [2]. Позднее в работах [3, 4] была развита полная теория этого явления.

Опишем этот эффект применительно к воронкообразным заливам. Колебания свободной поверхности в вязкой жидкости при глубинах меньше толщины слоя Стокса на мелкой воде описываются уравнением

$$\frac{\partial \overline{\varsigma}}{\partial t} = \frac{g}{3A_z}\left(\nabla, (H - \overline{\varsigma})^3 \nabla \overline{\xi}\right), \qquad (1)$$

которое является линеаризацией уравнения движения вязкой жидкости при глубинах меньших слоя Стокса, полученного в работе [1].

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду. Для этой цели введем безразмерные параметры

$$\zeta = \tilde{\xi}_0 \zeta', \; t = \tau_0 t', \; H = H_0 H', \; (\mathrm{x},\mathrm{y}) = L(x', y'). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и опуская далее штрихи, получим уравнение (1) в безразмерном виде

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \bar{A}\left(\nabla,\left(H-\varepsilon\zeta\right)^3 \nabla\zeta\right) \quad , \tag{3}$$

где $\bar{A} = \frac{gT_0H_0^3}{3AL^2}$, $\varepsilon = \tilde{\xi}_0 / \bar{H}_0$ отношения амплитуд прилива к глубине жидкости. Будем считать ε малой величиной. Перейдем к полярным координатам с полюсом в вершине залива. Считаем, что по угловой координате ϕ уровень меняется мало и зависимостью ζ от ϕ можно пренебречь. В результате будем иметь нелинейное уравнение

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \bar{A}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(H-\varepsilon\zeta\right)^3 \frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) \tag{4}$$

Будем искать решения (4) в виде асимптотического ряда по малому параметру ε

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \ldots \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим уравнения для первого и второго приближений по ε:

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial t} = \frac{\bar{A}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH^3\frac{\partial\zeta_0}{\partial r}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = \frac{\bar{A}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH^3\frac{\partial\zeta_1}{\partial r} - \frac{3}{2}rH^2\frac{\partial\zeta^2{}_0}{\partial r}\right) \tag{7}$$

Граничные условия: на внешней границе мелководной зоны ($r = R$) залива задается входящая приливная волна, а в вершине ($r = 0$) твердая стенка:

$$\zeta\big|_{r=R} = \tilde{c}\mathrm{e}^{i\omega t} \quad , \quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{8}$$

Соответственно, для ζ_0 и ζ_1 будем иметь граничные условия:

$$\zeta_0\big|_{r=R} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{\xi}_0}\mathrm{e}^{i\omega t} \quad , \quad \left.\frac{\partial\zeta_0}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{9}$$

$$\zeta_1\Big|_{r=R}=0 \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial r}\Big|_{r=0}=0 \tag{10}$$

Ищем волновые решения системы (6) – (7). Для первого приближения ζ_0 получим решение первого уравнения системы (6).

$$\zeta_0=\frac{\tilde{c}}{\tilde{\xi}_0}\left[\frac{\mathrm{J}_0\left(kr\right)}{\mathrm{J}_0\left(kR\right)}\mathrm{e}^{i\omega t}+conj\right] \tag{11}$$

где $k=\sqrt{\frac{i\omega}{\bar{A}H^3}}$, J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,

$conj$ – комплексно сопряженное выражение первого слагаемого.

Для нахождения следующего приближения ζ_1 необходимо выражение (11) подставить во второе уравнение системы (7). Заметим, что при возведении выражения (11) в квадрат получим два волновых члена и не волновой член от удвоенного произведения слагаемых в (11)

$$2\frac{J_0\left(kr\right)J_0\left(k^*r\right)}{J_0\left(kR\right)J_0\left(k^*R\right)} \tag{12}$$

Волновые слагаемые решения уравнения (7) для ζ при осреднении по периоду волны дадут ноль, а остаточный подъем уровня – пампинг-эффект – будет определяться выражением (12) в правой части уравнения (7):

$$\zeta_1=\frac{3\tilde{c}^2}{\tilde{\xi}_0^2H}\left[\frac{J_0\left(kr\right)J_0\left(k^*r\right)}{J_0\left(kR\right)J_0\left(k^*R\right)}-1\right]. \tag{13}$$

Или в размерной форме:

$$\zeta^{(+)}=\varepsilon\tilde{\xi}_0\zeta_1=\frac{3\tilde{c}^2}{H}\left[\frac{J_0\left(kr\right)J_0\left(k^*r\right)}{J_0\left(kR\right)J_0\left(k^*R\right)}-1\right]. \tag{14}$$

Расчеты показали, что величина пампинг-эффекта в вершине воронкообразного залива в 4 раза больше, нежели в канале аналогичной длины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-05-00209а.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зырянов В.Н. Топографические вихри в динамике морских течений / В.Н Зырянов. М.: Ин-т водн. пробл. РАН. 1995. 239 с.
2. Зырянов В.Н., Хубларян М.Г. Пампинг-эффект в теории нелинейных процессов типа уравнения теплопроводности и его приложение в геофизике // Доклады Академии наук. 2006. Т. 408. № 4. С. 535-538.
3. Zyryanov V.N. Nonlinear PumpingEffect in Oscillation Processes in Geophysics // Water Resources. 2013. Vol. 40. No. 3. Pp. 243–253
4. Zyryanov V.N. Nonlinear pumping in oscillatory diffusive processes: The impact on the oceanic deep layers and lakes // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2014. Vol. 19. Pp. 2131–2139.