

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТИПА ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ АНАЛИЗА НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ В АРКТИЧЕСКОМ БАССЕЙНЕ

**Кузьмина Н.П.¹, Скороходов С.Л.², Журбас Н.В.¹,
Лыжков Д.А.¹**

¹*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, г. Москва,
Нахимовский пр., 36, 8(499)124-63-96, kuzmina@ocean.ru*

²*ФИЦ “Информатика и Управление” РАН
119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40, 8(499)135-04-40, sskorokhodov@gmail.com*

The instability of the geostrophic current with a linear vertical velocity shear is analyzed with a reference to the Arctic basin. The model problem reduces to solving a spectral equation of Orr-Sommerfeld type. The presented results of numerical calculations are used to investigate the intrusions observed under conditions of stable-stable stratification.

Анализируется неустойчивость геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости применительно к описанию образования интрузий во фронтальных зонах Арктического бассейна, характеризующихся абсолютно устойчивой стратификацией.

Актуальность исследования вытекает из следующих положений: а) диссипативные процессы (вертикальное трение и вертикальная диффузия плавучести) могут оказывать существенное влияние на неустойчивость геострофических течений; б) при описании неустойчивости геострофических течений в некоторых случаях (в частности, когда течение переносит воду с T,S -индексами, отличающимися от T,S -индексов окружающих вод) важно учитывать линейный вертикальный сдвиг геострофической скорости.

Для исследования устойчивых и неустойчивых возмущений течения с линейным вертикальным сдвигом скорости используется уравнение потенциального вихря в квазигеострофическом приближении, представленное в размерном виде в работах [1, 2], и в безразмерном виде – в работе [3]. Спектральная задача сводится к следующему уравнению и граничным условиям (подробнее см. [3]):

$$(1 - z^2 - c) \left(\frac{d^2 F}{dz^2} - Bu \cdot (k^2 + \pi^2) F \right) + 2F = \frac{1}{ikR} \left(\frac{d^4 F}{dz^4} - Pr \cdot Bu \cdot (k^2 + \pi^2) \frac{d^2 F}{dz^2} \right), \quad (1)$$

$$-c \frac{dF}{dz} + 2zF = \frac{1}{ikR} \frac{d^3 F}{dz^3}, \quad z = \pm 1, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = 0, \quad (3)$$

где $F(z)$ – возмущение давления, k – безразмерное волновое число вдоль течения, $R = Re \cdot H/L$, Re – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), H – вертикальный масштаб слоя, L – поперечный масштаб течения, Bu – число Бургера, Pr – число Прандтля, $c = c_1 + ic_2$ – комплексная фазовая скорость. Как видно из (1)–(3) существуют сходства и различия данной спектральной задачи с задачей Орра-Зоммерфельда для течения Пуазейля.

В [1, 2] на основе аналитических рассмотрений упрощенного модельного уравнения (1) при $Bu \cdot (k^2 + \pi^2) \ll 1$, $Pr \sim 1$ показано, что геострофическое течение с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом диффузии плавучести может быть неустойчиво в масштабах интрузионного расслоения. Отличительной чертой рассмотренной неустойчивости является то, что фазовая скорость неустойчивых возмущений направлена по течению и превышает максимальную скорость среднего потока, и, следовательно, ее нельзя отнести к неустойчивости критического слоя или бароклинной неустойчивости.

В данном докладе представлены новые результаты исследований неустойчивости геострофического течения с линейным сдвигом скорости в ограниченном по вертикали слое, которые проведены в рамках двух подходов: упрощенной задачи (1)–(3), рассмотренной при $Bu \cdot (k^2 + \pi^2) \ll 1$, $Pr \sim 1$ и многопараметрической задачи (1)–(3), на основе которой можно описать устойчивые и неустойчивые моды в широком диапазоне изменения волнового числа.

Задачи решались численным высокоточным методом, предложенным в работе [4]. Численные расчеты проверялись с помощью аналитических асимптотических оценок, сравнения зависимостей собственных значений от параметров задачи, полученных на основе численных расчетов и аналитических решений (подробнее см. работу [3]), а также численными расчетами упрощенной задачи (1)–(3) по альтернативному методу [4].

На основе решения упрощенной задачи (1)–(3) было получено, что в спектре собственных значений существует значение, соответствующее

неустойчивым возмущениям с фазовой скоростью, которая направлена вдоль потока и превышает его максимальную скорость, что подтверждает выводы о новом типе неустойчивости, изложенные в работах [1, 2]. На рис. 1 представлены спектры собственных значений для нечетных собственных функций в координатных осях c_1 и c_2 для $kR=10$. Возмущения являются неустойчивыми, если $c_2 > 0$.

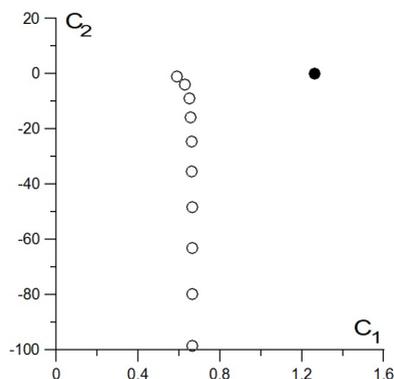


Рис. 1. Спектр собственных значений упрощенной задачи (1)–(3) (нечетные решения) в комплексной плоскости $c=c_1+ic_2$; белыми и черными кружками обозначены собственные значения, соответствующие устойчивым и неустойчивым возмущениям соответственно; $kR = 10$.

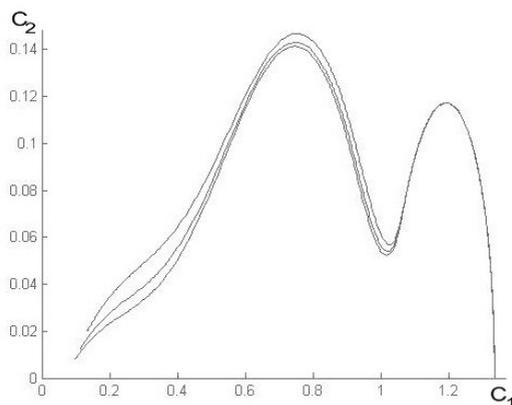


Рис. 2. Собственные значения (для нечетных решений) неустойчивых мод (задача 2) в широком диапазоне изменения волнового числа при $R = 10$, $Vi = 0.0001$, $Pr = 1; 4; 10$ в комплексной плоскости $c = c_1 + ic_2$.

Решениями задачи 2 удается описать различные виды неустойчивости и показать, что диапазон изменения волнового числа неустойчивых мод является широким. На рис. 2 приведены собственные значения неустойчивых мод в координатных осях c_1 и c_2 в широком диапазоне изменения волнового числа и значений параметров задачи $R=10$, $Bu=0.0001$, $Pr = 1; 4; 10$.

Исследования, представленные в докладе, поддерживались грантами РФФИ (проекты 15-05-01479 и 16-01-00781) и РНФ (проект 14-50-00095).

Дополнительные независимые численные расчеты упрощенной задачи (1)-(3) проводились Н.В. Журбас по методу, альтернативному методу [4]. Эта часть работы поддерживалась грантом РНФ 17-77-10080.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмина Н. П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina, N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: an analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // *Ocean Science*. 2016. V.12. P. 1269–1277. doi: 10.5194/05-12-1269-2016.
3. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости в масштабах интрузионного расслоения // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2017 (в печати).
4. Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра-Зоммерфельда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2007. Т. 47. №10. С.1672–1691.